УДК 512.53, 512.54.

В. В. Данг, С. Ю. Корабельщикова, Б. Ф. Мельников

О ЗАДАЧЕ НАХОЖДЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОЛУГРУППЫ АППРОКСИМАЦИИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Предметом исследования являются полугруппы и некоторые предикаты, заданные на этой полугруппе, в частности предикат равенства и предикат вхождения элемента в подполугруппу. Решается задача нахождения минимальной полугруппы аппроксимации для некоторых классов полугрупп П и предикатов Q. В качестве аппроксимационных гомоморфизмов мы будем рассматривать характеры, поэтому среди полугрупп для нашей задачи, очевидно, необходимо рассматривать только коммутативные полугруппы. Комплексным характером полугруппы называется гомоморфизм данной полугруппы в мультипликативную полугруппу, состоящую из всех комплексных чисел, по модулю равных 1, и нуля. Цели работы – описание известных полугрупп аппроксимации, методов доказательства этого факта, выяснение вопросов существования и единственности минимальных полугрупп аппроксимации для некоторых классов и предикатов.

Материалы и методы. В работе используются общие методы анализа и синтеза. Также используются специальные аппроксимационные методы, а именно метод построения гомоморфизма, метод разложения коммутативной регулярной полугруппы в полурешетку максимальных подгрупп, метод продолжения гомоморфизма подгруппы до гомоморфизма всей полугруппы.

Результаты. Для произвольного класса полугрупп определяется минимальная полугруппа аппроксимации относительно некоторого заданного предиката. В работе дан обзор известных результатов, указаны минимальные полугруппы аппроксимации для некоторых классов полугрупп П и предикатов Q, в частности, для класса коммутативных регулярных периодических полугрупп относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу. Аппроксимация, по сути являясь приближением, позволяет заменить одни объекты другими, более компактными либо хорошо изученными. В данном случае, об истинностном значении предиката, заданного на некотором классе полугрупп, можно судить по его значению на соответствующих элементах минимальной полугруппы аппроксимации.

Выводы. В статье приводится пример группы, для которой невозможно найти минимальную полугруппу аппроксимации. Также вопросы существования и единственности минимальной полугруппы аппроксимации для некоторых классов полугрупп П и предикатов Q решаются отрицательно. Однако в частных случаях минимальную полугруппу аппроксимации найти удается – приводятся примеры минимальных полугрупп аппроксимации с доказательством этого факта.

Ключевые слова: аппроксимация полугрупп, минимальная полугруппа аппроксимации, собственная подполугруппа.

V. V. Dang, S. Yu. Korabel'shchikova, B. F. Mel'nikov

ON THE PROBLEM OF FINDING MINIMUM SEMIGROUP OF APPROXIMATION

Abstract.

Background. The research subject is semigroups and some predicates, given in semigroups, in particular, the equality predicate and the predicate of element's entering a sub-semigroup. The study deals with the problem of finding minimum semigroup of approximation for some classes of Π semigroups and Q predicates. The authors considered characters as approximation homomorphisms. Therefore, apparently, among the semigroups for the given problem it is necessary to consider only commutative semigroups. Under a complex character of semigroup one should understand a homomorphism of the given semigroup into a multiplicative semigroup, consisting of complex numbers, equaling 1 in absolute value, and a zero. The aim of the work is to describe the known semigroups of approximation, methods for proving the given fact, to calrify the issues of existence and uniqueness of minimum semigroups of approximation for some classes and predicates.

Materials and methods. The authors used general methods of analysis and synthesis, as well as approximation methods, in particular, the method of homomorphism building, the method of decomposition of a commutative regular semigroup into a semilattice of maximum sub-groups, the method of sub-group homomorphism extension to a homomorphism of the whole semigroup.

Results. The minimum semigroup of approximation relative to a certain given predicate is determined for a random class of semigroups. The work reviews the known results, specifies minimum semigroups of approximation for some classes of Π semigroups and Q predicates, in particular, for the calss of commutative regular periodic semigroups relative to the predicate of element's entering a sub-semigroup. Approximation allows to substitute one objects by other, either more compact or better studied ones. In this case, one can judge about the true value of the predicate, set on a certain class of semigroups, by its value on the corresponding elements of minimum semigroups of approximation.

Conclusions. The article gives an example of a group, for which it is impossible to find a minimum semigroup of approximaton. Moreover, the issues of existence and uniqueness of a minimum subgroup of approximation for some classes of G semigroups and Q predicates are solved negatively. However, in special cases it is possible to find a minimum semigroup of approximation – the article describes and proves the examples of such minimum semigroups of approximation.

Key words: approximation of semigroups, minimum semigroup of approximation, private sub-semigroup.

Введение

С начала 1960-х гг. вышло много работ, посвященных аппроксимации алгебраических систем – прежде всего групп, полугрупп, колец и алгебр – относительно различных предикатов. Начало широкого применения аппроксимационных методов в алгебре связано с именем академика А. И. Мальцева. В его статье [1] было дано общее понятие аппроксимации алгебраических систем, показана связь финитной аппроксимируемости алгебраической системы относительно какого-либо предиката с алгоритмической разрешимостью проблемы этого предиката в рассматриваемой системе. Это обстоятельство послужило толчком к исследованию финитной аппроксимируемости алгебраических систем. В настоящее время интерес к этой тематике нашел отражение в работах [2, 3] и ряде других.

Аппроксимация полугрупп относительно различных предикатов изучалась М. М. Лесохиным и его учениками [4–6] и превратилась сейчас в обширную развивающуюся область теории полугрупп. Именно аппроксимационными методами С. И. Кублановским [5] был положительно решен вопрос алгоритмической разрешимости проблемы делимости в целой серии многообразий полугрупп.

Можно обобщить понятие финитной аппроксимации, рассматривая гомоморфизмы полугрупп в полугруппы с заданными свойствами, в частности характеры. Характером полугруппы называют гомоморфизм данной полугруппы в некоторую стандартную полугруппу *K*. Обычно в качестве *K* берется мультипликативная полугруппа некоторого поля. Комплексным характером будем называть гомоморфизм данной полугруппы в мультипликативную полугруппу, состоящую из всех комплексных чисел, по модулю равных 1, и нуля. Изучением полугрупп комплексных характеров занимались Ш. Шварц [7], Р. Уорн и Л. Вильямс [8], М. М. Лесохин [9] и ряд других авторов.

В тех случаях, когда полугруппа аппроксимации содержит достаточно много элементов (особенно, если она бесконечна), возникает естественный вопрос о нахождении минимальной полугруппы аппроксимации, т.е. такой полугруппы, что никакая ее собственная подполугруппа не может служить полугруппой аппроксимации для данного класса полугрупп. Задача о минимальной полугруппе аппроксимации была поставлена профессором М. М. Лесохиным в 1990-е гг. Интерес к этим вопросам нашел отражение в исследованиях С. Ю. Корабельщиковой [10] и В. В. Данга [11]. Все стандартные определения и обозначения, употребляемые в настоящей статье, можно найти в работах [4, 12, 13].

1. Аппроксимация полугрупп

Определение 1. Пусть A – произвольная полугруппа; Q – некоторый предикат, заданный на элементах, подмножествах полугруппы A и всех ее гомоморфных образов; Φ – некоторое множество гомоморфизмов полугруппы A. Будем говорить, что полугруппа A аппроксимируема гомоморфизмами из Φ относительно предиката Q, если для любых подмножеств A_1 и A_2 полугруппы A таких, что $Q(A_1, A_2)$ ложно, существует гомоморфизм $\varphi \in \Phi$, для которого $Q(\varphi(A_1), \varphi(A_2))$ ложно.

Подмножества A_1 и A_2 могут быть одноэлементными, при этом они отождествляются со своими элементами.

В этом разделе под предикатом Q будем понимать предикат равенства – важнейший и наиболее естественный в любой алгебраической системе.

Рассмотрим вопрос аппроксимации коммутативных групп и полугрупп относительно предиката равенства комплексными характерами. Напомним, что комплексным характером называется гомоморфизм данной полугруппы в мультипликативную полугруппу *K*, состоящую из всех комплексных чисел, по модулю равных 1, и нуля. В нашем случае определение аппроксимации выглядит следующим образом.

Определение 2. Полугруппа A аппроксимируема комплексными характерами относительно предиката равенства, если для любых элементов a и b полугруппы A, таких что $a \neq b$, существует комплексный характер $\varphi \in Hom(A, K)$, для которого $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

При нахождении условий аппроксимации часто используется метод продолжения гомоморфизма подгруппы до гомоморфизма всей полугруппы. Приведем без доказательства лемму о продолжении комплексного характера подгруппы на всю группу [13, с. 254].

Лемма 1. Пусть H – подгруппа коммутативной группы G и φ_0 – характер этой подгруппы. Тогда существует характер φ группы G, совпадающий с φ_0 на подгруппе H.

Теорема 1. Коммутативная группа G аппроксимируема комплексными характерами относительно предиката равенства.

Доказательство. Пусть $a, b \in G$ и $a \neq b$. Достаточно показать, что существует характер φ группы G, для которого $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Для определенности будем считать, что $\varphi(b) \neq 0$, и можно умножить обе части неравенства на $\varphi(b)^{-1}$. Получим: $\varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1} \neq 1$, откуда $\varphi(ab^{-1}) \neq 1$.

Пусть $c = ab^{-1}$. Достаточно показать, что найдется характер φ, такой что $\varphi(c) \neq 1$. Так как по условию $a \neq b$, то $c \neq 1$. Рассмотрим циклическую подгруппу H группы G, порожденную элементом c: $H=\{c^i \mid i \in \mathrm{Z}\}$.

Если c имеет бесконечный порядок, то отображение φ_0 из H в K, заданное по правилу $\varphi_0(c^i) = (-1)^i$ $(i \in \mathrm{Z})$, является комплексным характером группы H. При этом $\varphi_0(c) = -1 \neq 1$.

Если же порядок элемента c равен n, то возьмем α – какой-либо отличный от 1 корень n-й степени из 1. Отображение φ_0 из H в K зададим по правилу: $\varphi_0(c^i) = \alpha^i$ $(i \in \{0, 1, \ldots, n-1\})$; φ_0 является комплексным характером группы H, причем $\varphi_0(c) = \alpha \neq 1$.

В любом из случаев нашелся комплексный характер φ_0 подгруппы H, для которого $\varphi_0(c) \neq 1$. Тогда согласно лемме 1 существует комплексный характер φ группы G, совпадающий с φ_0 на подгруппе H, т.е. $\varphi(c) = \varphi_0(c) \neq 1$.

Далее рассмотрим вопрос аппроксимируемости полугрупп относительно предиката равенства. Очевидно, что некоммутативная полугруппа A не аппроксимируема характерами относительно равенства, так как при $ab \neq ba$ $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ для любого характера φ (в силу коммутативности умножения в поле).

Определение 3. Полугруппа A называется сепаративной, если из $a^2 = b^2 = ab$ следует $a = b$.

Лемма 2. Пусть A – коммутативная полугруппа, являющаяся объединением полурешетки Y непересекающихся групп G_α, $\alpha \in Y$, e_α – единица группы G_α. Пусть $\xi \in Y$ и φ_0 – произвольный характер группы G_ξ. Тогда отображение φ, заданное по правилу

$$\varphi(a) = \begin{cases} \varphi_0(ae_\xi), \text{ если } ae_\xi \in G_\xi, \\ 0, \text{ если } ae_\xi \notin G_\xi, \end{cases}$$

является характером полугруппы A, совпадающим с φ_0 на G_ξ.

Доказательство. Достаточно показать, что φ – гомоморфизм, т.е. $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$. Отметим, что для элементов $a\in G_\alpha$ и $b\in G_\beta$ полугруппы A их произведение $ab\in G_{\alpha\beta}$, где $\alpha\beta=\inf\{\alpha,\beta\}$ в полурешетке Y.

Если $ae_\xi\in G_\xi$ и $be_\xi\in G_\xi$, то $abe_\xi = ae_\xi\, be_\xi \in G_\xi$, т.е. $\varphi(ab)=\varphi_0(abe_\xi)$ и $\varphi(a)\varphi(b)=\varphi_0(ae_\xi)\varphi_0(be_\xi)=\varphi_0(ae_\xi be_\xi)=\varphi_0(abe_\xi)$.

Рассмотрим случай, когда хотя бы один из элементов ae_ξ, be_ξ не принадлежит G_ξ. Пусть для определенности $ae_\xi\notin G_\xi$, тогда $\varphi(a)=0$ и $\varphi(a)\varphi(b)=0$. Осталось показать, что $\varphi(ab)=0$, т.е. $abe_\xi\notin G_\xi$. Пусть $a\in G_\alpha$ и $b\in G_\beta$, тогда $ae_\xi\in G_{\alpha\xi}$, где $\alpha\xi=\inf\{\alpha,\xi\}$ и $\alpha\xi\neq\xi$, так как $ae_\xi\notin G_\xi$. Значит, $\alpha\xi<\xi$. Тогда $abe_\xi = bae_\xi\in G_{\beta\alpha\xi}$, где $\beta\alpha\xi=\inf\{\beta,\alpha\xi\}$ и $\beta\alpha\xi\le\alpha\xi$, откуда $\beta\alpha\xi<\xi$ и, значит, $\beta\alpha\xi\neq\xi$ и $abe_\xi\notin G_\xi$.

Теорема 2. Коммутативная полугруппа A аппроксимируема комплексными характерами относительно равенства тогда и только тогда, когда A сепаративна.

Доказательство. *Необходимость.* От противного предположим, что A не сепаративна, т.е. $a^2=b^2=ab$, но $a\neq b$. По условию найдется такой комплексный характер φ полугруппы A, что $\varphi(a)\neq\varphi(b)$. С другой стороны, из $\varphi(a)^2=\varphi(b)^2=\varphi(a)\varphi(b)$ следует $\varphi(a)=\varphi(b)$. Пришли к противоречию.

Достаточность. Пусть A – сепаративная полугруппа. Согласно [13, с. 180] A является объединением полурешетки Y архимедовых полугрупп с сокращениями S_α ($\alpha\in Y$), и может быть вложена в полугруппу B, которая является объединением такой же полурешетки Y групп G_α, где G_α для каждого α является группой частных полугруппы S_α.

Пусть $a\in S_\alpha$ и $b\in S_\beta$ и $a\neq b$. Предположим сначала, что $\alpha\neq\beta$, тогда либо $\alpha\not\leq\beta$, либо $\beta\not\leq\alpha$. Пусть для определенности $\beta\not\leq\alpha$. Пусть φ_0 – произвольный ненулевой характер группы G_β, тогда $\varphi_0(b)\neq 0$. По лемме 2 его можно продолжить до характера φ всей полугруппы B. Из $ae_\beta\in G_{\alpha\beta}\neq G_\beta$ следует, что $\varphi(a)=0$. Ограничение характера φ на A является, очевидно, искомым характером полугруппы A.

Предположим теперь, что $\alpha=\beta$. Тогда a и b являются различными элементами одной коммутативной группы G_α. Согласно теореме 2 G_α аппроксимируема комплексными характерами относительно предиката равенства, т.е. найдется комплексный характер φ_0 группы G_α такой, что $\varphi_0(a)\neq\varphi_0(b)$. По лемме 2 мы снова получаем характер φ полугруппы B, ограничение которого на A является, очевидно, искомым характером полугруппы A.

3. Понятие минимальной полугруппы аппроксимации. Примеры

В тех случаях, когда полугруппа аппроксимации содержит достаточно много элементов (особенно если она бесконечна), возникает естественный вопрос о нахождении минимальной полугруппы аппроксимации, т.е. такой полугруппы, что никакая ее собственная подполугруппа не может служить полугруппой аппроксимации для данного класса полугрупп.

Определение 4. Полугруппа B называется минимальной полугруппой аппроксимации для класса полугрупп П относительно предиката Q, если выполняются следующие условия:

1) любая полугруппа A из класса П аппроксимируема гомоморфизмами в полугруппу B относительно предиката Q;

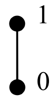
2) если полугруппа A аппроксимируема гомоморфизмами в B относительно Q, то A принадлежит классу П;

3) для всякой собственной подполугруппы B' полугруппы B существует полугруппа A' из П такая, что A' не аппроксимируема гомоморфизмами в подполугруппу B' относительно предиката Q.

Всегда ли можно найти минимальную полугруппу аппроксимации? Приведем групповой пример, дающий отрицательный ответ на поставленный вопрос. Так, пусть $B = \langle a_0 \rangle$ – бесконечная циклическая группа, порожденная элементом a_0. Как известно, B изоморфна аддитивной группе целых чисел Z. Любая собственная подгруппа группы B также изоморфна Z. Следовательно, если класс полугрупп П аппроксимируем гомоморфизмами в B, то П аппроксимируем гомоморфизмами в любую собственную подгруппу группы B. Так как множество всех подгрупп группы B является бесконечной убывающей цепью, то не существует собственной подгруппы B_0 группы B, минимальной по включению. Значит, указать минимальную группу аппроксимации в данном случае невозможно.

Теперь приведем примеры минимальных полугрупп аппроксимации с доказательством этого факта.

Пример 1. Пусть $B = \{0, 1\}$ – двухэлементная цепь.



Утверждение 1. Полугруппа В является минимальной полугруппой аппроксимации для класса полурешеток относительно предиката равенства.

Доказательство. Проверим выполнение трех условий определения минимальной полугруппы аппроксимации.

1. Пусть A – произвольная полурешетка. Покажем, что полугруппа A аппроксимируема относительно предиката равенства гомоморфизмами в B.

Пусть $a, b \in A$ и $a \neq b$. Тогда $ab \neq b$ или $ab \neq a$. Пусть для определенности верно первое неравенство, т.е. $ab \neq b$. Рассмотрим идеал $I_b = \{\xi \in A \mid \xi b \neq b\}$. Так как $b \notin I_b$, то для гомоморфизма φ, заданного по правилу

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0, \text{если } \xi \in I_b, \\ 1, \text{если } \xi \notin I_b, \end{cases}$$

получаем $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Сделав несложную проверку, можно убедиться, что данное отображение φ является гомоморфизмом.

2. Покажем, что если полугруппа A аппроксимируема гомоморфизмами в B относительно *равенства*, то A – полурешетка.

Пусть $a \in A$; предположим, что $a^2 \neq a$. Тогда по условию найдется гомоморфизм φ из A в B, такой что $\varphi(a^2) \neq \varphi(a)$.

С другой стороны, учитывая, что полугруппа B идемпотентна, а $\varphi(a) \in B$, получим $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2 = \varphi(a)$. Пришли к противоречию. Значит, предположение не верно, и для всех $a \in A$ $a^2 = a$, т.е. полугруппа A идемпотентна.

Далее, пусть $a,b \in A$ и предположим, что $ab \neq ba$. Тогда по условию найдется гомоморфизм φ из A в B такой, что $\varphi(ab) \neq \varphi(ba)$.

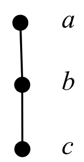
Учитывая, что полугруппа B коммутативна, получим $\varphi(ab) = = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba)$. Пришли к противоречию. Значит, предположение не верно, и для всех a, $b \in A$ $ab = ba$, т.е. полугруппа A коммутативна.

Итак, полугруппа A идемпотентна и коммутативна, а значит, является полурешеткой.

3. Осталось показать, что для всякой собственной подполугруппы B' полугруппы B существует полурешетка A', такая что A' не аппроксимируема гомоморфизмами в подполугруппу B' относительно предиката *равенства. Этот факт очевиден, поскольку любая собственная подполугруппа B' полугруппы B одноэлементна, и, значит, для любого гомоморфизма* φ *из* A' в B' *и для любых* a, $b \in A'$ будет выполняться равенство $\varphi(a) = \varphi(b)$. Поэтому в качестве A' можно взять любую полурешетку, содержащую более одного элемента.

Пример 2. Покажем, что полугруппа B из первого примера не может служить минимальной полугруппой аппроксимации для класса полурешеток относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу.

Пусть $A = \{a, b, c\}$ – трехэлементная цепь.



Утверждение 2. A не аппроксимируема гомоморфизмами в B относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу.

Доказательство. Рассмотрим подполугруппу $A_1 = \{a, c\}$ полугруппы A, $b \notin A_1$.

Предположим, что найдется гомоморфизм φ из A в B такой, что $\varphi(b) \notin \varphi(A_1)$. Это возможно только в двух случаях: $\varphi(b) = 0$, а $\varphi(A_1) = \{1\}$, или, наоборот, $\varphi(b) = 1$, а $\varphi(A_1) = \{0\}$.

Рассмотрим первый случай. Имеем $\varphi(a) = \varphi(c) = 1$, $\varphi(b) = 0$. С другой стороны, так как $c = bc$, то $\varphi(c) = \varphi(bc) = \varphi(b)\varphi(c) = 0 \cdot 1 = 0$. Значит, первый случай невозможен.

Рассмотрим второй случай. Имеем $\varphi(a) = \varphi(c) = 0$, $\varphi(b) = 1$. С другой стороны, так как $b = ba$, то $\varphi(b) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) = 1 \cdot 0 = 0$. Значит, второй случай невозможен.

Следовательно, полугруппа A не аппроксимируема гомоморфизмами в B относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу, и первое условие из определения минимальной полугруппы аппроксимации не выполняется.

Пример 3. Пусть L – периодическая часть мультипликативной полугруппы комплексных чисел с внешне присоединенной единицей e. Она состоит из нуля 0, группы всех корней любой натуральной степени из единицы, и внешней единицы e. В работе [10] получен следующий результат, для которого в настоящей работе мы приведем более короткое доказательство.

Теорема 3. Полугруппа L является минимальной полугруппой аппроксимации для класса коммутативных периодических регулярных полугрупп относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу.

Доказательство. Проверим выполнение всех трех условий из определения минимальной полугруппы аппроксимации.

1. Покажем, что коммутативная регулярная периодическая полугруппа A аппроксимируема относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу гомоморфизмами в L.

Пусть A_1 – некоторая подполугруппа полугруппы A и $a \notin A_1$. Так как $A = \bigcup\limits_{\xi \in \Gamma} A_\xi$, где A_ξ – максимальная подгруппа A с регулярной единицей ξ, то для некоторого ξ_0 верно, что $a \in A_{\xi 0}$.

Пусть $A_{\xi 0} \cap A_1 = \varnothing$. Рассмотрим естественный гомоморфизм ψ полугруппы A на полугруппу ее идемпотентов E_A. Рассмотрим идеал $I_{\xi 0} = \{\xi \in E_A \mid \xi\xi_0 \neq \xi_0\}$. Возможно, что $\psi(A_1) \subset I_{\xi 0}$. Так как $\xi_0 \notin I_{\xi 0}$, то для гомоморфизма φ полугруппы идемпотентов E_A в K, такого что

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0, \text{ если } \xi \in I_{\xi 0}, \\ 1, \text{ если } \xi \notin I_{\xi 0}, \end{cases}$$

получаем $\varphi(\psi(a)) \notin \varphi(\psi(A_1))$.

Пусть $\psi(A_1) \not\subset I_{\xi 0}$, тогда $\psi(A_1) \cap (E_A \setminus I_{\xi 0}) = E_1$ – подполугруппа полугруппы $E_A \setminus I_{\xi 0}$. Обозначим через E_0 максимальную подполугруппу $E_A \setminus I_{\xi 0}$, содержащую E_1, но не содержащую ξ_0. Так как $(E_A \setminus I_{\xi 0}) \setminus E_0$ – вполне изолированный идеал полугруппы $E_A \setminus I_{\xi 0}$, то отображение φ полугруппы идемпотентов E_A в L такое, что

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0, \text{ если } \xi \in I_{\xi 0}, \\ 1, \text{ если } \xi \in (E_A \setminus I_{\xi 0}) \setminus E_0, \\ e, \text{ если } \xi \in E_0, \end{cases}$$

является гомоморфизмом. Получаем $\varphi(\psi(a)) \notin \varphi(\psi(A_1))$, причем в обоих случаях $\varphi \circ \psi$ – гомоморфизм полугруппы A в L.

Пусть $A_{\xi 0} \cap A_1 \neq \varnothing$. Обозначим через G максимальную подгруппу группы $A_{\xi 0}$, не содержащую a. Тогда $A_{\xi 0}/G$ – циклическая группа типа C_{pk}, и, значит, ее можно гомоморфно вложить в L. Пусть φ_1 – естественный гомоморфизм $A_{\xi 0}$ на $A_{\xi 0}/G$, φ_2 – гомоморфизм-вложение $A_{\xi 0}/G$ в L. Тогда для $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ выполняется $\varphi(a) \notin \varphi(A_1)$.

Продолжив гомоморфизм φ до гомоморфизма всей полугруппы A следующим образом:

$$\varphi'(a)=\begin{cases}0, & \text{если } \xi_a\xi_0\neq\xi_0,\\ \varphi(a\xi_0), & \text{если } \xi_a\xi_0=\xi_0,\end{cases}$$

получаем требуемое.

2. Пусть полугруппа A аппроксимируема гомоморфизмами в L относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу. Тогда она аппроксимируема относительно равенства, а значит, коммутативна.

Предположим, что A нерегулярна. Тогда A содержит собственный неизолированный идеал I и, значит, для некоторого $a\in A$ верно, что $a^2\in I$, но $a\notin I$. По условию существует гомоморфизм φ из A в L, такой что $\varphi(a)\notin\varphi(I)$. Так как $\varphi(a)\in L$, то $\varphi(a)$ – элемент конечного порядка. Единица e и нуль 0 в полугруппе L внешние, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\varphi(a)^n=1\in\varphi(I)$ для некоторого натурального n. Тогда $\varphi(a)=\varphi(a)^{n+1}\in\varphi(I)$, что противоречит выбору φ. Значит, A – регулярная полугруппа.

Пусть $a\in A$. Тогда a содержится в некоторой максимальной подгруппе A_ξ полугруппы A. Тогда найдется элемент $a'\in A_\xi$, такой что $aa'=\xi$.

Если $a'\in[a]$, то $a'=a^n$, откуда получаем $a^{n+1}=\xi$, т.е. a имеет конечный порядок.

Если же $a'\notin[a]$, то по условию существует гомоморфизм φ из A в L, такой что $\varphi(a)\notin\varphi([a])=[\varphi(a)]$. Поскольку $\varphi(a)$ имеет конечный порядок, то при некотором натуральном k имеем

$$\varphi(a')=\varphi(a'\xi)=\varphi(a')\,\varphi(\xi)=\varphi(a')\,(\varphi(a))^k=\varphi(a')\,\varphi(a^k)=$$
$$=\varphi(a'a^k)=\varphi(\xi a^{k-1})=\varphi(a^{k-1})=\varphi(a)^{k-1}\in[\varphi(a)],$$

что невозможно.

Таким образом, A является коммутативной регулярной периодической полугруппой.

3. Пусть B – собственная подполугруппа полугруппы L. Из рассуждений, приведенных во втором примере данной статьи, понятно, что если B содержит не все три идемпотента полугруппы L, то она не может служить полугруппой аппроксимации относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу, например, для трехэлементной цепи.

Предположим, что B содержит не все корни любой натуральной степени из 1. Тогда существуют простое p и натуральное k, что корень α степени p^k из 1 не принадлежит B. Обозначим C_{pk} мультипликативную группу корней степени p^k из 1. Она циклическая, пусть ξ – ее образующий, тогда $\xi^i=\alpha$, и если $\xi\in B$, то в силу алгебраичности операции имеем $\alpha\in B$. Значит, любой первообразный корень степени p^k из 1 не принадлежит B. По той же причине B не содержит первообразных корней степени p^i из 1, где $i>k$. Пусть $A=C_{pk}$. Очевидно, A принадлежит классу коммутативных регулярных периодических полугрупп. Так как B не содержит элементов порядка p^k, то для любого $a\in A$ порядка p^i и для произвольного гомоморфизма φ из A в B порядок элемента $\varphi(a)$ есть p^j, где $j<i$. Пусть a – первообразный корень степени p из 1, $a\notin[1]$, но для любого гомоморфизма φ из A в B имеем: $\varphi(a)=\varphi(1)$ – некоторый идемпотент полугруппы B. Получили $\varphi(a)\in\varphi([1])$, что противоречит условию.

Пример 4. В работе [11] была построена полугруппа, являющаяся также минимальной полугруппой аппроксимации для класса коммутативных регулярных периодических полугрупп относительно предиката вхождения элемента в подполугруппу.

Пусть C_{p^∞} – абелева группа типа p^∞ с единицей e_p и действием $\circ p$. Пусть C^* – полурешетка групп C_{p^∞}, $p \in Q$, где Q – множество всех простых чисел. Определим в C^* действие * следующим образом:

$$\forall a_p, a_q \in C^* \quad a_p * a_q = \begin{cases} a_p \circ_p a_q, & \text{если } p = q, \\ a_{\max(p,q)}, & \text{если } p \neq q \text{ и } \max(p,q) > 3, \\ e_5, & \text{если } p \neq q \text{ и } \max(p,q) = 3. \end{cases}$$

Схематично полугруппа C^* изображена на рис. 1.

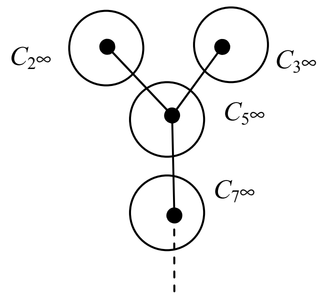


Рис. 1. Полугруппа C^*

Построенная полугруппа C^* существенно отличается от полугруппы L из примера 3, так как не содержит ни нуля, ни единицы и имеет счетное число идемпотентов. Она является также минимальной полугруппой аппроксимации для класса всех коммутативных сепаративных полугрупп относительно предиката равенства, для класса всех коммутативных сепаративных периодических полугрупп относительно предиката вхождения в моногенную подполугруппу.

Заключение

Как было сказано выше, вопрос существования минимальной полугруппы аппроксимации для некоторых классов полугрупп П и предикатов Q решается отрицательно. Из примеров 3 и 4 следует, что вопрос единственности минимальной полугруппы аппроксимации для заданного класса полугрупп П и предиката Q также решается отрицательно.

Таким образом, новые результаты в данной области следует искать как на пути варьирования классов полугрупп и предикатов, так и на пути описания всех минимальных полугрупп аппроксимации при фиксированных П и Q.

Список литературы

1. **Мальцев, А. И.** О гомоморфизмах на конечные группы / А. И. Мальцев // Ученые записки / Ивановск. гос. пед. инс. – 1958. – Т. 18, № 5. – С. 49–60.
2. **Азаров, Д. Н.** О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 3. – С. 485–497.

3. **Розов, А. В.** Об аппроксимируемости конечными p-группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами / А. В. Розов // Вестник Ивановского государственного университета. Естественные, общественные науки. – 2013. – Вып. 2. – С. 88–93.
4. **Лесохин, М. М.** Об аппроксимации полугрупп относительно предикатов / М. М. Лесохин // Ученые записки / ЛГПИ им. Герцена. – 1971. – Т. 404. – С. 191–219.
5. **Кублановский, С. И.** О финитной аппроксимируемости предмногообразий полугрупп относительно предикатов / С. И. Кублановский // Современная алгебра. Группоиды и их гомоморфизмы. – Л., 1980. – С. 58–88.
6. **Корабельщикова, С. Ю.** Аппроксимация полугруппы характеров гомоморфизмами в мультипликативную полугруппу конечного поля / С. Ю. Корабельщикова, И. В. Игнатьева // Вестник Поморского университета. Сер. Естественные науки. – 2011. – № 2. – С.107–110.
7. **Шварц, Ш.** Теория характеров коммутативных полугрупп / Ш. Шварц // Чехословацкий математический журнал. – 1954. – Т. 4 (79). – С. 219–247.
8. **Warne, R. J.** Characters of inverse semigroups / R. J. Warne, L. K. Williams // Czechosl. Math. Journal. – 1966. – Vol. 11 (86), № 1. – P. 150–155.
9. **Лесохин, М. М.** Характеры коммутативных полугрупп. I, II // Известия вузов. Математика. – 1970 – № 8. – С. 67–74 ; 1971. – № 2. – С. 71–77.
10. **Корабельщикова, С. Ю.** О минимальной полугруппе аппроксимации относительно вхождения элемента в подполугруппу / С. Ю. Корабельщикова // Современная алгебра : межвуз. сб. науч. тр. – Вып. 2 (22). – Ростов н/Д, 1997. – С. 46–48.
11. **Данг, В. В.** Проблема минимизации полугруппы аппроксимации и SH-аппроксимации / Ван Винь Данг // Современная алгебра : межвуз. сб. науч. тр. – Вып. 3 (23). – Ростов н/Д, 1999. – С.43–47.
12. **Ляпин, Е. С.** Полугруппы / Е. С. Ляпин. – М. : Физматгиз, 1960. – 592 с.
13. **Клиффорд, А.** Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – М. : Мир, 1972. – 290 с.

References

1. Mal'tsev A. I. *Uchenye zapiski* [Scientific proceedings]. 1958, vol. 18, no. 5, pp. 49–60.
2. Azarov D. N. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 2013, vol. 54, no. 3, pp. 485–497.
3. Rozov A. V. *Vestnik Ivanovskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye, obshchestvennye nauki* [Bulletin of Ivanovo State University. Natural, social sciences]. 2013, iss. 2, pp. 88–93.
4. Lesokhin M. M. *Uchenye zapiski* [Scientific proceedings]. 1971, vol. 404, pp. 191–219.
5. Kublanovskiy S. I. *Sovremennaya algebra. Gruppoidy i ikh gomomorfizmy* [Contemporary algebra. Groupoids and homomorphisms thereof]. Leningrad, 1980, pp. 58–88.
6. Korabel'shchikova S. Yu., Ignat'eva I. V. *Vestnik Pomorskogo universiteta. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of Pomorsky University. Series: Natural sciences]. 2011, no. 2, pp. 107–110.
7. Shvarts Sh. *Chekhoslovatskiy matematicheskiy zhurnal* [Czechoslovak mathematical journal]. 1954, vol. 4 (79), pp. 219–247.
8. Warne R. J., Williams L. K. *Szechosl. Math. Journal*. [Czechoslovak mathematical journal]. 1966, vol. 11 (86), no. 1, pp. 150–155.
9. Lesokhin M. M. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1970, no. 8, pp. 67–74; 1971, no. 2, pp. 71–77.
10. Korabel'shchikova S. Yu. *Sovremennaya algebra: mezhvuz. sb. nauch. tr.* [Contemporary algebra: interuniversity collected articles]. Issue 2 (22). Rostov-on-Don, 1997, pp. 46–48.

11. Dang V. V. *Sovremennaya algebra: mezhvuz. sb. nauch. tr.* [Contemporary algebra: interuniversity collected articles]. Issue 3 (23). Rostov-on-Don, 1999, pp. 43–47.
12. Lyapin E. S. *Polugruppy* [Semigroups]. Moscow: Fizmatgiz, 1960, 592 p.
13. Klifford A., Preston G. *Algebraicheskaya teoriya polugrupp* [Algebraic theory of semigroups]. Moscow: Mir, 1972, 290 p.

Данг Ван Винь
кандидат физико-математических наук, доцент, Политехнический университет города Хо Ши Мин (Вьетнам, г. Хо Ши Мин, District 10, 268 Ly Thuong Kiet Street)

E-mail: bf-melnikov@yandex.ru

Dang Van Vinh
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Ho Chi Minh City University of Technology (268 Ly Thuong Kiet Street, District 10, Ho Chi Minh, Vietnam)

Корабельщикова Светлана Юрьевна
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры и геометрии, Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова (Россия, г. Архангельск, набережная Северной Двины, 17)

E-mail: kmv@atnet.ru

Korabel'shchikova Svetlana Yur'evn
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of algebra and geometry, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov (17 Severnoy Dviny embankment, Arkhangelsk, Russia)

Мельников Борис Феликсович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тольяттинский государственный университет (Россия, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14)

E-mail: bf-melnikov@yandex.ru

Mel'nikov Boris Feliksovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of applied mathematics and informatics, Togliatti State University (14 Belorusskaya street, Togliatti, Russia)

УДК 512.53, 512.54.

Данг, В. В.

О задаче нахождения минимальной полугруппы аппроксимации / В. В. Данг, С. Ю. Корабельщикова, Б. Ф. Мельников // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 88–99.